

### Feuille de TE 3 : Fonctions réciproques

**Rappel :** Comme annoncé lors de la séance de TD du 5 novembre, La feuille de TD6 (Fonctions réciproques) est **à terminer** pour le vendredi 19 novembre : les exercices 4 à 8 doivent **impérativement** avoir été traités et vous devez avoir réfléchi sur le problème (exercice 9).

#### Exercice 1. Fonctions réciproques (mai 2007)

On considère la fonction réelle  $f$  définie sur l'intervalle  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  par la formule :  $f(x) = \tan^3(x) + 3 \tan(x)$

1. Montrer que  $f$  est strictement croissante.
2. Déterminer l'image  $J$  de l'intervalle  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  par la fonction  $f$ .
3. Montrer que  $f$  est une bijection de  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  sur  $J$ .
4. Calculer la dérivée en 0 de la fonction réciproque  $f^{-1}$  de  $f$ .
5. Ecrire le développement limité de  $f^{-1}$  d'ordre 2 en 0.

#### Exercice 2. Fonctions réciproques (décembre 2007)

On considère la fonction réelle  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

1. Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 - (f(x))^2$ .
2. Déterminer l'image  $J = f(\mathbb{R})$  de  $\mathbb{R}$  par  $f$  et montrer que  $f$  admet une application réciproque  $g = f^{-1}$  définie sur  $J$ .
3. Déterminer la dérivée de la fonction  $g$ .
4. Expliciter  $g(y)$  en résolvant par rapport à  $x$  l'équation  $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ . Retrouver la valeur de  $g'(y)$ .

#### Exercice 3. Bijection (juin 2009)

Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par :

$$g(x) = (x - 1) \arctan(x)$$

1. Calculer  $g'(x)$  et  $g''(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
2. Etudier les variations de  $g'$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. On pose :  $J = g'([-\infty, -1])$ . Déterminer l'intervalle  $J$ .
4. Montre que l'équation  $g'(x) = 0$  possède une unique solution  $c$  dans  $\mathbb{R}$  et que l'on a  $c \in ]0, 1[$ .
5. Montrer que la fonction  $g$  admet un minimum en  $c$ .