

Feuille de TD 9 : Fonctions à plusieurs variables

Exercice 1. Ensembles de définition

Expliciter l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes et le représenter dans \mathbb{R}^2 :

1. $f : (x, y) \mapsto \sqrt{x + y}$
2. $f : (x, y) \mapsto \sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)}$
3. $f : (x, y) \mapsto \sqrt{\arctan x - \arctan y}$
4. $f : (x, y) \mapsto \frac{\sqrt{y-x}}{x} + \ln(x)$
5. $f : (x, y) \mapsto -\ln(x - y) + \frac{y}{x}$
6. $f : (x, y) \mapsto \frac{1}{\sqrt{\ln(x+y)}} + \arctan(x - y)$
7. $f : (x, y) \mapsto \ln(\sqrt{x^2 - 9y^2})$
8. $f : (x, y) \mapsto \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$
9. $f : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$
10. $f : (x, y) \mapsto \frac{x^2 + y^2 - 2x + k}{x^2 + y^2 + 2x + k}$

Exercice 2. Dérivées partielles

Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes en tout point (x, y) de leur ensemble de dérivabilité :

1. $f : (x, y) \mapsto \sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)}$
2. $f : (x, y) \mapsto \sqrt{\arctan x - \arctan y}$
3. $f : (x, y) \mapsto \frac{e^{xy} + e^{-xy}}{e^{xy} - e^{-xy}}$
4. $f : (x, y) \mapsto \frac{x^2 - y^2}{2xy}$
5. $f : (x, y) \mapsto \frac{1}{\sqrt{\ln(x+y)}} + \arctan(x - y)$
6. $f : (x, y) \mapsto \ln(\sqrt{x^2 - 9y^2})$

Exercice 3. Plan tangent

Donner l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x, y)$ au point donné dans les cas suivants :

1. $f : (x, y) \mapsto \sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)}$ au point $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$.
2. $f : (x, y) \mapsto \sqrt{\arctan x - \arctan y}$ au point $(1, 0, f(1, 0))$.
3. $f : (x, y) \mapsto \frac{e^{xy} + e^{-xy}}{e^{xy} - e^{-xy}}$ au point $(1, 1, f(1, 1))$.
4. $f : (x, y) \mapsto \frac{x^2 - y^2}{2xy}$ au point $(1, 1, 0)$.
5. $f : (x, y) \mapsto \frac{1}{\sqrt{\ln(x+y)}} + \arctan(x - y)$ au point $(1, 1, f(1, 1))$
6. $f : (x, y) \mapsto \ln(\sqrt{x^2 - 9y^2})$ au point $(5, 1, \ln(4))$

Exercice 4. Ligne de niveau

Déterminer les lignes de niveaux suivantes :

1. $f(x, y) = 0$ où $f : (x, y) \mapsto \frac{x^2 - y^2}{2xy}$.
2. $f(x, y) = 0$ où $f : (x, y) \mapsto \frac{x^2 + y^2}{2xy}$.
3. $f(x, y) = 1$ où $f : (x, y) \mapsto \frac{x^2 + y^2}{2xy}$.
4. $f(x, y) = 1$ où $f : (x, y) \mapsto \ln(x^2 + y^2)$.