Feuille de TD 6 : Fonctions réciproques

Exercice 1. Images des fonctions

Donner, dans chacun des cas suivants, l'image des intervalles indiqués par les fonctions données.

1. Soit $f : x \mapsto x^2$. Calculer $f([-1,-1/2])$, $f(]1,3[)$, $f([0,+\infty[)$, $f([-1,1])$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x$ si $x > 0$ et $f(x) = 3 - x$ si $x \leq 0$. Calculer $f([-2,2])$ et $f([0,1[)$.
3. Soit $f : x \mapsto x^2 - 1$. Calculer $f([0,+\infty[)$ et $f(\mathbb{R})$.
4. Soit $f : x \mapsto x^3 - 3x$. Calculer $f([-3/2,3/2])$.
5. Calculer $\tan(]-\pi/2,\pi/2[)$.
6. Calculer $\cos([0,2\pi[)$.

Exercice 2. Vrai ou Faux ?

1. Si f est continue sur I, alors elle a une fonction réciproque.
2. Si $f : I \to J$ a une fonction réciproque f^{-1}, alors $\forall x \in J\ f(f^{-1}(x)) = 1$.
3. Si $f : I \to J$ a une fonction réciproque f^{-1}, alors $\forall x \in I\ f(x)f^{-1}(x) = 1$.
4. Si $f : I \to J$ a une fonction réciproque f^{-1}, alors $\forall x \in I\ f^{-1}(f(x)) = x$.
5. Si $f : I \to J$ a une fonction réciproque f^{-1}, alors $\forall x \in J\ f(f^{-1}(x)) = x$.
6. Si $f\ :]2,+\infty[\to \mathbb{R}$ est bijective et $\lim_{x\to 2} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = 1/2$.
7. Une fonction continue croissante a une fonction réciproque.
8. Si f est bijective, alors f^{-1} est bijective.
9. Si f est bijective et bornée, alors f^{-1} est bornée.
10. Si f et g sont des bijections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors $(f \circ g)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Exercice 3. fonction réciproque d'une fraction rationnelle

Sur quels intervalles la fonction $f : x \mapsto \frac{x^3}{1+3x^4}$ admet-elle une réciproque. On définit f^{-1} comme la réciproque de f sur l'intervalle $[-1,1]$. Sur quel ensemble f^{-1} est elle dérivable ? Calculer cette dérivée en $f(\frac{1}{2})$.

Exercice 4. fonction réciproque

On définit f sur $[\pi/3,\pi]$ par $f(x) = 2\cos x - \cos(2x)$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque h dont on précisera l'intervalle de définition. En quels points h est-elle continue ? Dérivable ?
2. Calculer $h(\sqrt{2})$ et $h(1)$, puis $h'(\sqrt{2})$ et $h'(1)$.

Exercice 5. Développements limités et fonctions réciproques

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto x + \ln(1+x)$ définit une bijection de $]-1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
2. On admet que f^{-1} a un DL à l'ordre 3 en 0. En écrivant $f^{-1}(f(x)) = x$, trouver ce DL.

Exercice 6. Développements limités des fonctions trigonométriques inverses

Donner les DL à l'ordre 5 en 0 de $\arccos$, $\arcsin$, $\arctan$.

Exercice 7. fonctions trigonométriques et réciproques

Calculer $\arcsin(\sin\alpha)$, $\arccos(\cos\alpha)$ et $\arctan(\tan\alpha)$ dans les cas : $\alpha = \frac{\pi}{5}$, $\alpha = -\frac{\pi}{7}$, $\alpha = \frac{13}{5}\pi$.

Exercice 8. Identités

Vérifier les identités suivantes :

1. $\mathrm{Arcsin}\, x + \mathrm{Arccos}\, x = \frac{\pi}{2}$
2. $\mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}\, \frac{1}{x} = \text{signe}(x)\frac{\pi}{2}$

Exercice 9. Problème

On considère la fonction réelle f définie sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par :

$$f(x) = \frac{e^{\tan(x)} - e^{-\tan(x)}}{e^{\tan(x)} + e^{-\tan(x)}}.$$

1. Calculer $f'(x)$ pour $x \in I$.
2. Déterminer l'image $J = f(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$ de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par f et montrer que f admet une application réciproque f^{-1} définie sur J.
3. Calculer $\tan(f^{-1}(x))$ pour $x \in J$.
4. Déterminer la dérivée de la fonction f^{-1}.