Feuille de TD 5 : Propriétés globales des fonctions continues et dérivables

Exercice 1. Théorème des valeurs intermédiaires

1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in I, f(x)^2 = 1$. Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$.
2. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Montrer que f possède un point fixe, *i.e.* il existe x dans $[0,1]$ tel que $f(x) = x$.
3. Une fonction qui vérifie la propriété des valeurs intermédiaires est-elle nécessairement continue ?
4. Quelles sont les applications continues $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)^2 = 1 - x^2$?
5. Même question avec $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)^2 = x^2$

Exercice 2. Vrai faux

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

1. Si f est bijective de I sur $f(I)$ alors f est strictement monotone.
2. Si f est croissante sur I alors f définit une bijection de I sur $f(I)$.
3. Si f est strictement décroissante sur I alors f est bijective de I sur $f(I)$.
4. Si f est strictement monotone et continue sur I alors f est bijective de I sur $f(I)$.

Exercice 3. Bijectivité

Parmi les fonctions numériques suivantes, lesquelles sont bijectives sur leur ensemble de définition ? Lorsque la fonction n'est pas bijective sur son ensemble de définition, trouver un intervalle I sur lequel celle-ci définit une bijection.

1. $f_1(x) = e^x$
2. $f_2(x) = \ln(x)$
3. $f_3(x) = \sin(x)$
4. $f_4(x) = e^x \sin x$

Exercice 4. Théorème de Weierstrass

Donner, dans chacun des cas suivants, une fonction ayant la propriété indiquée.

1. Une fonction $[a,b] \to \mathbb{R}$ non bornée.
2. Une fonction $]a,b[\to \mathbb{R}$ continue, non bornée.
3. Une fonction $]a,b[\to \mathbb{R}$ continue, bornée, mais qui n'atteint pas ses bornes.
4. Une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, non bornée.
5. Une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, bornée, qui n'atteint pas ses bornes.

Exercice 5. Théorème de Weierstrass

Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On suppose que pour tout $x \in [a,b]$, $0 < f(x) < g(x)$. Montrer qu'il existe $0 < k < 1$ tel que $\forall x \in [a,b] \quad 0 < f(x) < kg(x)$. Montrer que cela est faux pour des fonctions continues definies sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 6. Théorème de Rolle

Soit $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On suppose que $f(a) = f(b) = 0$ et que f'' ne s'annule pas sur $]a,b[$. Montrer que f ne s'annule pas sur $]a,b[$.

Exercice 7. Racines d'un polynôme

Soit P un polynôme de degré n possédant n racines distincts. Démontrer que P' possède $n-1$ racines distincts. (On rappelle qu'un polynôme de degré n a au plus n racines distinctes).

Exercice 8. Accroissement d'une parabole

On rappelle que la formule des accroissements finis peut s'écrire sous la forme :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h)$$

avec $\theta \in]0,1[$. Calculer un tel θ pour $f(x) = ax^2+bx+c$ (pour $a \neq 0$). Donner une interprétation géomètrique de ce résultat.

Exercice 9. Inégalité des accroissement finis

1. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x < y$:
$$x < \frac{y-x}{\ln y - \ln x} < y$$
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:
$$\left(\frac{1+x}{x}\right)^x < e < \left(\frac{1+x}{x}\right)^{x+1}$$
3. Par application du théorème des accroissements finis à la fonction $\ln$ sur $[n, n+1]$, montrer que :
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.

Exercice 10. Continuité et bornes (plus difficile)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée. Atteint-elle ses bornes ?

Exercice 11. Extension du théorème de Rolle (plus difficile)

Soit f une fonction définie et continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, \infty[$ et telle que $\lim_{x\to\infty} f(x) = f(a)$. Montrer qu'il existe x_0 dans $]a, \infty[$ tel que $f'(x_0) = 0$.