

**Feuille de TD 2 : continuité et dérivabilité****Exercice 1. Vrai ou faux**

1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\exp(\ln(x)) = x$ .
2. Une fonction continue est dérivable.
3. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $(\sqrt{x})^2 = x$ .
4. Pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $|x + y| < |x| + |y|$ .
5. Une fonction  $f$  dérivable et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  a une dérivée strictement positive.

**Exercice 2. Continuité - raccord**

Déterminer les paramètres  $a$  et  $b$  pour que les fonctions suivantes soient continues :

$$f(x) = \begin{cases} 5, & x < -2 \\ ax + b, & -2 \leq x < 1 \\ \ln(x), & x \geq 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 2ax + ax^2, & x \geq 1 \\ \cos(\pi x), & x < 1 \end{cases}.$$

**Exercice 3. Fonction partie entière**

On rappelle que  $E$  est la fonction partie entière, c'est-à-dire la fonction qui associe à tout réel l'unique entier relatif qui lui est directement inférieur. (exemples :  $E(1) = 1$ ,  $E(1.5) = 1$ ,  $E(\pi) = 3$ ,  $E(-1.5) = -2$ ).

Etudier la continuité sur  $\mathbb{R}$  des fonctions suivantes :

1.  $f(x) = E(x)$ ,
2.  $g(x) = xE(x)$ ,
3.  $h(x) = \sin(\pi x)E(x)$ .

**Exercice 4. Dérivabilité et continuité**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue et dérivable en 0, telle que  $f(0) = 0$ . Montrer que la fonction définie pour  $x \neq 0$  par  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$  peut se prolonger par continuité en 0. Que se passe-t-il si  $f(0) \neq 0$  ?

**Exercice 5. Dérivabilité - raccord**

Déterminer  $a, b \in \mathbb{R}$  de manière à ce que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \text{ et } f(x) = ax^2 + bx + 1 \text{ si } x > 1$$

soit dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$

**Exercice 6. Dérivabilité - raccord**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\sin(x)) & \text{si } x \leq 0 \\ 1 + x^2 \ln(1+x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1.  $f$  est-elle continue ?
2. Calculer la dérivée de  $f$  sur  $\mathbb{R}^*$ .  $f$  est-elle dérivable en 0 ?

### Exercice 7. Calcul de tangente

Ecrire l'équation de la tangente à la courbe des fonctions suivantes au point d'abscisse  $x = 0$ .

1.  $f(x) = x^2 + x + 1, x \in \mathbb{R}$

2.  $g(x) = \tan(x), x \in (-\pi/2, \pi/2)$

3.  $h(x) = \exp(4x), x \in \mathbb{R}$