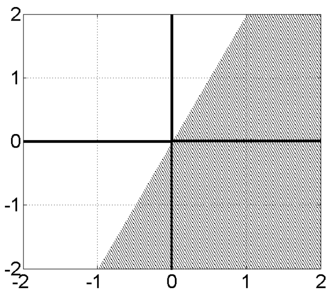
Corrigés du TD 10

Exercice 1. Fonctions à plusieurs variables (décembre 2007)

1. La fonction $\ln$ étant définie sur $\mathbb{R}_+^*$, pour que $f(x,y)$ soit définie, il faut que $2x - y > 0$, c'est-à-dire $y < 2x$. Il s'agit donc du demi-plan situé en-dessous de la droite d'équation $y = 2x$ (droite non comprise). Le domaine est grisé sur la figure suivante.



2. Pour tout $(x,y) \in D$, les dérivées partielles de f sont $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y + \frac{2}{2x-y}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + 4y - \frac{1}{2x-y}$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 5$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 4$.
3. Une équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x,y)$ au point $(1,1,4)$ est :

$$z = 4 + 5(x-1) + 4(y-1)$$

Exercice 2. Equation différentielle (mai 2008)

1. Pour tout $x \in]2, +\infty[$, on a $\phi'(x) = \frac{2}{x(x-2)}$.
2. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre de la forme $y' = a(x)y + b(x)$ avec $a(x) = \phi'(x)$ et $b(x) = 2(x-2)$. L'équation homogène associée est $y' = \frac{2}{x(x-2)}y$. Une primitive de $a(x)$ est $A(x) = \phi(x)$, par conséquent la solution générale de l'équation homogène associée est :

$$y_0 = Ke^{\phi(x)} = K\frac{x-2}{x} \text{ avec } K \in \mathbb{R}$$

Pour trouver une solution particulière, on utilise la méthode de la variation de la constante : on va chercher une solution particulière de l'équation avec second membre $y' = \frac{2}{x(x-2)}y + 2(x-2)$ sous la forme :

$$y_p = K(x)\frac{x-2}{x}$$

La dérivée de y_p est donnée par $y_p' = K'(x)\frac{x-2}{x} + K(x)\frac{2}{x^2}$. En injectant y_p dans l'équation, on obtient :

$$K'(x)\frac{x-2}{x} + K(x)\frac{2}{x^2} = \frac{2}{x(x-2)}K(x)\frac{x-2}{x} + 2(x-2)$$

donc :

$$K'(x)\frac{x-2}{x} + K(x)\frac{2}{x^2} = \frac{2}{x^2}K(x) + 2(x-2)$$

donc $K'(x) = 2x$.
On peut donc choisir $K(x) = x^2$ et on obtient $y_p = x(x-2)$.
Par conséquent la forme générale de la solution de l'équation avec second membre est :

$$y = y_p + y_0 = x(x-2) + K\frac{x-2}{x}, K \in \mathbb{R}$$

Exercice 3. Bijection (juin 2009)

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \arctan(x) + \frac{x-1}{1+x^2}$ et $g''(x) = \frac{2(x+1)}{(1+x^2)^2}$.
2. Comme Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(1+x^2)^2 > 0$, $g''(x)$ est strictement négatif pour $x < -1$, nul en $x = -1$ et strictement positif pour $x > -1$. Par conséquent, g' est strictement décroissante sur $]-\infty, -1]$ et strictement croissante sur $[-1, \infty[$.
3. g' est strictement décroissante et continue sur $]-\infty, -1]$ donc $g'(]-\infty, -1]) = [g(-1), \lim_{x\to-\infty} g(x)[$. Or $\lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{1+x^2} = 0$, donc $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\frac{\pi}{2}$. Donc $J = [-\frac{\pi}{4} - 1, -\frac{\pi}{2}[$
4. $0 \notin J$ donc $g'(x) = 0$ n'a pas de solution dans $]-\infty, -1]$. g étant strictement croissante sur $[-1, +\infty[$, g définit une bijection de $[-1, +\infty[$ sur $g([-1, +\infty[) = [-\frac{\pi}{4} - 1, \frac{\pi}{2}[$. Or $0 \in [-\frac{\pi}{4} - 1, \frac{\pi}{2}[$. Par conséquent l'équation $g'(x) = 0$ a une unique solution dans $[-1, +\infty[$ et donc a une unique solution dans $\mathbb{R}$. Comme $g'(0) < 0$ et $g'(1) > 0$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet de conclure que $c \in]0, 1[$.
5. $g'(x)$ est nul en $x = c$, positif pour $x > c$ et négatif pour $x < c$ par conséquent, g admet un minimum en c.

Exercice 4. Fonctions réciproques (décembre 2008)

1. $f'(x) = \frac{4(1+\tan^2 x)}{(e^{\tan x}+e^{-\tan x})^2}$
2. On a : $f(x) = \frac{e^{\tan x}-e^{-\tan x}}{e^{\tan x}+e^{-\tan x}} = \frac{e^{\tan x}(1-e^{-2\tan x})}{e^{\tan x}(1+e^{-2\tan x})} = \frac{(1-e^{-2\tan x})}{(1+e^{-2\tan x})}$
   On en déduit que $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = 1$
   Puis de façon analogue, en écrivant que $f(x) = \frac{e^{2\tan x}-1}{e^{2\tan x}+1}$, on obtient $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} f(x) = -1$.

   $f'(x)$ étant positif pour tout $x \in I$, f est strictement croissante sur I. f étant strictement croissante et continue sur I, on peut conclure que $J =]-1, 1[$.
   f est strictement monotone donc elle définit une bijection de I dans son image J, et il existe donc une application réciproque f^{-1} définie sur J.
3. On a $x = f(f^{-1}(x)) = \frac{e^{\tan(f^{-1}(x))}-e^{-\tan(f^{-1}(x))}}{e^{\tan(f^{-1}(x))}+e^{-\tan(f^{-1}(x))}} = \frac{e^{2\tan(f^{-1}(x))}-1}{e^{2\tan(f^{-1}(x))}+1}$.
   Donc $e^{2\tan(f^{-1}(x))} - 1 = x(e^{2\tan(f^{-1}(x))} + 1)$.
   On trouve alors $e^{2\tan(f^{-1}(x))} = \frac{1+x}{1-x}$.
   En passant au logarithme, on obtient alors : $\tan(f^{-1}(x)) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
4. On sait que $f'(y) = \frac{4(1+\tan^2 y)}{(e^{\tan y}+e^{-\tan y})^2}$ et que pour $x \in J$, $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.
   Donc $(f^{-1})'(x) = \frac{(e^{\tan(f^{-1}(x))}+e^{-\tan(f^{-1}(x))})^2}{4(1+\tan^2(f^{-1}(x)))}$.
   En utilisant l'expression obtenue dans la question précédente, on trouve alors :

   $$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{(1-x^2)(1+\frac{1}{4}(\ln(\frac{1+x}{1-x}))^2)}$$