Feuille de TD 10 : Révisions

Exercice 1. Fonctions à plusieurs variables (décembre 2007)

On considère la fonction de deux variables f définie par :

$$f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2 + \ln(2x - y)$$

1. Quel est le domaine de définition de la fonction f ? (faire une figure).
2. Calculer les dérivées partielles de f au point $(1,1)$.
3. Ecrire l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x,y)$ au point $(1,1,4)$.

Exercice 2. Equation différentielle (mai 2008)

1. Calculer la dérivée de la fonction définie par :

$$\phi(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x}\right), x \in]2,+\infty[.$$

2. Trouver la solution générale sur l'intervalle $x \in]2,+\infty[$ de l'équation différentielle :

$$y' = \frac{2}{x(x-2)}y + 2(x-2).$$

Exercice 3. Bijection (juin 2009)

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$g(x) = (x-1)\arctan(x)$$

1. Calculer $g'(x)$ et $g''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Etudier les variations de g' sur $\mathbb{R}$.
3. On pose : $J = g'(]-\infty,-1])$. Déterminer l'intervalle J.
4. Montrer que l'équation $g'(x) = 0$ possède une unique solution c dans $\mathbb{R}$ et que l'on a $c \in]0,1[$.
5. Montrer que la fonction g admet un minimum en c.

Exercice 4. Fonctions réciproques (décembre 2008)

On considère la fonction réelle f définie sur $I =]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ par :

$$f(x) = \frac{e^{\tan(x)} - e^{-\tan(x)}}{e^{\tan(x)} + e^{-\tan(x)}}.$$

1. Calculer $f'(x)$ pour $x \in I$.
2. Déterminer l'image $J = f(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[)$ de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ par f et montrer que f admet une application réciproque f^{-1} définie sur J.
3. Calculer $\tan(f^{-1}(x))$ pour $x \in J$.
4. Déterminer la dérivée de la fonction f^{-1}.