

Devoir maison 2

À rendre le 04/11/10

On portera un soin tout particulier à la rédaction et à la rigueur. Les copies à deux ou trois sont autorisées (voire encouragées), mais elles doivent aussi dans ce cas comporter deux ou trois écritures. Et comme toujours, attention aux erreurs de calcul !

Exercice 1

Donner le développement limité en 0 à l'ordre 8 de la fonction f définie par

$$f(x) = \sin(\ln(\cos(x^2))).$$

Exercice 2

1. Donner le DL à l'ordre 2 en $\pi/4$ de $\cos(x)$, $\cos^2(x)$ et $\cos^{-2}(x)$.
2. En déduire le DL à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \tan(x + \pi/4)$.

Exercice 3

On définit f par

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 + \sin x & \text{si } x \leq 0 \\ \ln(1+x) + x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue et dérivable en 0, et donner l'équation de la tangente à f en 0.
2. Préciser la position du graphe de f par rapport à cette tangente.

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $I =]0, \pi/2[$ par

$$f(x) = \sqrt{1 + \tan x} - \frac{1}{2} \tan x.$$

1. Tracer le tableau de variations de f , avec ses limites.
2. Montrer que f est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.
3. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = 0$, et déterminer cet α .
4. Montrer que f^{-1} est dérivable en 0 et calculer cette dérivée.