Corrigé du devoir maison n°1

Exercice 1. Continuité de la dérivée

On a $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ et $\sin$ est bornée sur $\mathbb{R}$. En utilisant le théorème des gendarmes, on obtient donc que $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. f est donc prolongeable par continuité en posant $f(0) = 0$.

Le taux d'accroissement de f en 0 a pour expression :

$$\tau_0(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Comme $\sin$ et bornée et que $\lim_{x\to 0} x = 0$, on a $\lim_{x\to 0} \tau_0(x) = 0$, donc f est dérivable en 0 de dérivée $f'(0) = 0$.

f est clairement dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée a pour expression pour $x \neq 0$:

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Comme $\lim_{x\to 0} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ et que $\cos$ n'a pas de limite en $+\infty$ (et $-\infty$) f' n'a pas de limite en 0 et par conséquent f' n'est pas continue en 0.

Exercice 2. Etude de fonctions

1. La fonction $\ln$ étant définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, φ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Sa dérivée est donnée sur cet ensemble par :
$$\varphi'(x) = 2x - \frac{2}{x} = 2\frac{x^2 - 1}{x}$$
φ' est donc négative sur $]0, 1[$, nulle en 1 et positive sur $]1, +\infty[$. Par conséquent, φ est décroissante sur $]0, 1[$, croissante sur $]1, +\infty[$ et atteint son minimum en $x = 1$.
2. On a $\lim_{x\to +\infty} \varphi(x) = +\infty$ (par croissance comparée de $\ln$ et de $x \mapsto x^2$) et comme $\varphi(1) = 0$ (minimum de φ), l'image de φ est $\varphi(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}_+$.
3. φ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent $x \mapsto \sqrt{\varphi(x)}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que g est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue sur $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$. En outre, $\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^+} g(x) = 0 = g(1)$. Par conséquent g est continue en 1. Par conséquent g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$
4. Sur $]0, 1[$, g est l'opposée de la composée de la fonction racine carrée qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et de φ qui est dérivable et strictement positive sur $]0, 1[$. Par conséquent g est dérivable sur $]0, 1[$. De façon analogue, g est dérivable sur $]1, +\infty[$.
Sur $]0, 1[$, la dérivée de g est donnée par :
$$g'(x) = -\frac{\varphi'(x)}{2\sqrt{\varphi(x)}}$$
Sur $]1, +\infty[$, la dérivée de g est donnée par :
$$g'(x) = \frac{\varphi'(x)}{2\sqrt{\varphi(x)}}$$

5. L'étude du signe de φ' faite dans la question 1 montre que g' est positive sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$, par conséquent g est croissante sur ces deux intervalles. Comme de plus g est continue en 1, g est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3. Développements limités

1. DL de f :

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(\alpha\ln(1+x)) = \cos\left(\alpha\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^3\varepsilon(x)\right)\right) \\ &= 1-\frac{\alpha^2}{2}\left[x^2-2\frac{x.x^2}{2}\right]+x^3\varepsilon(x) \\ &= 1-\frac{\alpha^2}{2}x^2+\frac{\alpha^2}{2}x^3+x^3\varepsilon(x) \end{aligned}$$

2. DL de g :

$$\begin{aligned} g(x) &= \sin(\alpha\ln(1+x))\sin\left(\alpha\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^3\varepsilon(x)\right)\right) \\ &= \alpha\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^3\varepsilon(x)-\frac{\alpha^2}{6}x^3\right] \\ &= \alpha x-\frac{\alpha}{2}x^2+\frac{2\alpha-\alpha^3}{6}x^3+x^3\varepsilon(x) \end{aligned}$$

3. En utilisant les formules de trigonométrie, il vient $h(x)=\sin(2\alpha\ln(1+x))$. Par conséquent, le calcul du DL est immédiat en remplaçant α par 2α dans l'expression du DL de g. $h(x) = 2\alpha x - \alpha x^2 + \frac{2\alpha-4\alpha^3}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$

Exercice 4. Calcul de limite

La limite à calculer est de forme indéterminée (0 sur 0). On calcule le DL en 0 à l'ordre 2 du numérateur et du dénominateur :

$$e^x-\sqrt{1+2x} = 1+x+\frac{x^2}{2}-(1+\frac{1}{2}2x+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2!}(2x)^2)+x^2\varepsilon(x) = 1+x+\frac{x^2}{2}-(1+x-\frac{x^2}{2})+x^2\varepsilon(x) = x^2+x^2\varepsilon(x)$$

et :

$$x\sin(x) = x(x+x\varepsilon(x)) = x^2+x^2\varepsilon(x)$$

Par conséquent, pour tout $x \neq 0$:

$$\frac{e^x-\sqrt{1+2x}}{x\sin x} = \frac{x^2+x^2\varepsilon(x)}{x^2+x^2\varepsilon(x)} = \frac{x^2(1+\varepsilon(x))}{x^2(1+\varepsilon(x))} = \frac{(1+\varepsilon(x))}{(1+\varepsilon(x))}$$

La nouvelle expression n'est plus d'une forme indéterminée : le numérateur tend vers 1 et le dénominateur tend vers 1. Par conséquent :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\sqrt{1+2x}}{x\sin x} = 1$$

Exercice 5. Développements limités

1. **Initialisation :** f est bien (au moins) 0 fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout x strictement positif $f^{(0)}(x) = f(x) = e^{-\frac{1}{x}} = \frac{P_0(x)e^{-\frac{1}{x}}}{x^{2\times 0}}$ où P_0 est le polynôme constant égal à 1.

   Hérédité : On suppose que f est n fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)e^{-\frac{1}{x}}}{x^{2n}}$. $f^{(n)}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ (comme quotient de fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant pas sur cet ensemble) donc f est bien $n+1$ fois dérivable sur $]0,+\infty[$. La dérivée $n+1$-ème de f a pour expression :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)})'(x) \\ &= \frac{x^{2n}(P_n'(x)e^{-\frac{1}{x}} + P_n(x)\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}) - 2nx^{2n-1}P_n(x)e^{-\frac{1}{x}}}{x^{4n}} \\ &= \frac{x^{2n-2}(x^2P_n'(x) + P_n(x) - 2nxP_n(x))e^{-\frac{1}{x}}}{x^{4n}} \\ &= \frac{(x^2P_n'(x) + P_n(x) - 2nxP_n(x))e^{-\frac{1}{x}}}{x^{2(n+1)}} \end{aligned}$$

   Or $(x^2P_n'(x)+P_n(x)-2nxP_n(x))$ est un polynôme. Par conséquent, en posant $P_{n+1}(x) = (x^2P_n'(x)+P_n(x) - 2nxP_n(x))$, on obtient bien : $f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(x)e^{-\frac{1}{x}}}{x^{2(n+1)}}$. La propriété est donc héréditaire.
   Conclusion : La propriété à démontrer est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, donc, en utilisant le principe de récurrence, elle est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. De façon évidente, f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et toutes ses dérivées successives sont nulles sur cet intervalle. Par conséquent :

$$\lim_{x\to 0^-} f^{(n)}(x) = 0$$

   Le résultat de la question 1 permet d'affirmer que :

$$\lim_{x\to 0^+} f^{(n)}(x) = 0$$

   par croissance comparée de l'exponentielle et des polynômes en $+\infty$. Par conséquent, f est n fois dérivable en 0 et $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n.

3. En appliquant la formule de Taylor-Young à f à l'ordre n, on obtient donc :

$$f(x) = 0 + x^n\varepsilon(x)$$

   Ainsi le DL en 0 de f est nul (quel que soit l'ordre), ce qui montre bien que le DL est une notion locale, puisque la fonction f est non nulle pour $x > 0$.