Correction du DM 2

Solution de l'exercice 1

On a successivement les DL suivants au voisinage de 0.

$$\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{24} + x^8\varepsilon(x)$$

donc

$$\begin{aligned}
\ln(\cos x^2) &= \ln\left(1 + \left(-\frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{24} + x^8\varepsilon(x)\right)\right) \\
&= -\frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{24} - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{24}\right)^2 + x^8\varepsilon(x) \\
&= -\frac{x^4}{2} + \frac{x^8}{24} - \frac{x^8}{8} + x^8\varepsilon(x) \\
&= -\frac{x^4}{2} - \frac{x^8}{12} + x^8\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned}
\sin(\ln(\cos x^2)) &= \sin\left(-\frac{x^4}{2} - \frac{x^8}{12} + x^8\varepsilon(x)\right) \\
&= -\frac{x^4}{2} - \frac{x^8}{12} + x^8\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 2

1. On pose $x = \pi/4 + h$, de sorte que h tend vers 0 quand x tend vers $\pi/4$. On a alors

$$\begin{aligned}
\cos(x) = \cos(\pi/4 + h) &= \cos(\pi/4)\cos h - \sin(\pi/4)\sin h \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{h^2}{2} - h + h^2\varepsilon(h)\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - h - \frac{h^2}{2}\right) + h^2\varepsilon(h)
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\cos^2 x &= \frac{1}{2}\left(1 - h - \frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon(h)\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + h^2 - 2h - 2\frac{h^2}{2} + h^2\varepsilon(h)\right) \\
&= \frac{1}{2} - h + h^2\varepsilon(h)
\end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned}
\cos^{-2}(x) = \frac{1}{\cos^2 x} &= \frac{1}{\frac{1}{2} - h + h^2\varepsilon(h)} \\
&= 2\frac{1}{1 - 2h + h^2\varepsilon(h)} \\
&= 2(1 + 2h + (2h)^2 + h^2\varepsilon(h)) \\
&= 2 + 4h + 8h^2 + h^2\varepsilon(h).
\end{aligned}$$

On en déduit les DL suivants au voisinage de $\pi/4$:

$$\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right) + \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 \varepsilon\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

et

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} - \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 \varepsilon\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

et finalement

$$\cos^{-2}(x) = 2 + 4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 8\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 \varepsilon\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

2. La dérivée de tan est $\cos^{-2}$, donc le DL au voisinage de $\pi/4$ de tan s'obtient en intégrant le DL au voisinage de $\pi/4$ de $\cos^{-2}$, sans oublier le terme d'ordre 0, qui est $\tan(\pi/4) = 1$. Ainsi

$$\tan(x) = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 \varepsilon\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

et donc le DL de $\tan(x + \pi/4)$ au voisinage de 0 est

$$\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 + 2x + 2x^2 + x^2\varepsilon(x).$$

Solution de l'exercice 3

1. On commence par faire les DL à gauche et à droite de f en 0, à l'ordre 2. On a, quand $x \leq 0$,

$$f(x) = e^x - 1 + \sin x = 1 + x + \frac{x^2}{2} - 1 + x + x\varepsilon(x) = 2x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$$

et, quand $x > 0$,

$$f(x) = \ln(1+x) + x = x - \frac{x^2}{2} + x + x^2\varepsilon(x) = 2x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x).$$

À l'ordre 1, ces deux DL coïncident, donc f a un DL à l'ordre 1 en 0 qui est

$$f(x) = 2x + x\varepsilon(x).$$

Ainsi, f est continue et dérivable en 0, et l'équation de sa tangente en 0 est $y = 2x$.

2. D'après les DL ci-dessus, on a, quand $x \leq 0$,

$$f(x) - 2x = \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$$

et cette quantité est positive pour x proche de 0. Ainsi, le graphe de f est localement au-dessus de sa tangente à gauche de 0. De même, on a, quand $x > 0$,

$$f(x) - 2x = -\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$$

donc le graphe de f est localement en dessous de sa tangente à droite de 0.

Solution de l'exercice 4

1. f est dérivable sur I et pour tout $x \in I$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 + \tan^2 x}{2\sqrt{1 + \tan x}} - \frac{1}{2}(1 + \tan^2 x) \\ &= \frac{1 + \tan^2 x}{2\sqrt{1 + \tan x}}(1 - \sqrt{1 + \tan x}). \end{aligned}$$

Or $\tan x > 0$ pour $x \in I$, donc f' est strictement négative sur I. De plus, on a évidemment

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1.$$

Enfin, pour la limite en $\pi/2$, on écrit

$$f(x) = \sqrt{\tan x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\tan x}} - \frac{1}{2}\sqrt{\tan x}\right).$$

Quand $x \to \pi/2$, le premier terme tend vers $+\infty$, le second vers $-\infty$, donc on en déduit

$$\lim_{x\to\pi/2} f(x) = -\infty.$$

Ainsi, on a le tableau de variations suivant.

x	0		$\pi/2$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$

2. f est continue, donc $J = f(I)$ est un intervalle (TVI). Comme f est croissante sur I et que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1, \qquad \lim_{x\to\pi/2} f(x) = -\infty,$$

on a $J =]-\infty, 1[$. De plus, d'après la question 1, f est strictement décroissante sur I, donc f est une bijection de I sur J.

3. f est une bijection de I sur J, et $0 \in J$, donc il existe un unique $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = 0$. On a de plus

$$\begin{aligned} f(\alpha) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{1+\tan\alpha} - \tfrac{1}{2}\tan\alpha = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{1+\tan\alpha} = \tfrac{1}{2}\tan\alpha \\ &\Leftrightarrow \quad 1+\tan\alpha = \tfrac{1}{4}\tan^2\alpha \qquad \text{car } 1+\tan\alpha \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \tan^2\alpha - 4\tan\alpha - 4 = 0 \end{aligned}$$

On pose $x = \tan\alpha$. x est donc solution de $x^2 - 4x - 4 = 0$. Donc $x = 2 \pm 2\sqrt{2}$. Mais $\alpha \in]0, \pi/2[$, donc $x = \tan\alpha > 0$. La seule solution possible est donc $x = \tan\alpha = 2 + 2\sqrt{2}$. Comme $\alpha \in]0, \pi/2[$, alors

$$\alpha = \arctan(2 + 2\sqrt{2}).$$

4. On sait que f^{-1} est dérivable en 0 si et seulement si $f'(f^{-1}(0)) \neq 0$, et qu'alors

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))}.$$

Or $f' < 0$ sur I, donc f^{-1} est bien dérivable en 0. De plus, $f^{-1}(0) = \alpha$ par définition, donc on a, en se rappelant que $\tan\alpha = 2 + 2\sqrt{2}$ et $\sqrt{1+\tan\alpha} = 1/2\tan\alpha = 1 + \sqrt{2}$, que

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(0) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(\alpha)} = \frac{2\sqrt{1+\tan\alpha}}{(1+\tan^2\alpha)(1-\sqrt{1+\tan\alpha})} \\ &= \frac{2+2\sqrt{2}}{(1+(2+2\sqrt{2})^2)(-\sqrt{2})} = \frac{2+2\sqrt{2}}{(13+8\sqrt{2})(-\sqrt{2})} \\ &= \frac{-2-\sqrt{2}}{13+8\sqrt{2}} = \frac{(-2-\sqrt{2})(13-8\sqrt{2})}{(13+8\sqrt{2})(13-8\sqrt{2})} \\ &= \frac{-10+3\sqrt{2}}{169-128} = \frac{-10+3\sqrt{2}}{41}. \end{aligned}$$