Corrigé de l'interrogation de contrôle continu n°3

Exercice 1. Questions de cours (4 pts)

La fonction $\sin$ étant strictement croissante et continue sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, elle définit une bijection de $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1; 1]$. $\arcsin$ est définie comme la réciproque de cette bijection.

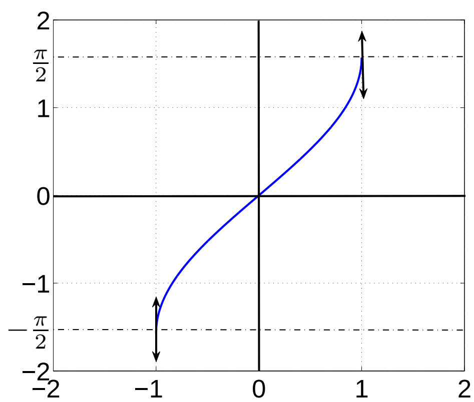
La dérivée de $\sin$ n'étant nulle qu'en $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, $\arcsin$ est dérivable sur $]-1; 1[$. Sa dérivée est donnée par (formule de la dérivée de la réciproque) :

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

Or $\cos^2(\arcsin(x)) + \sin^2(\arcsin(x)) = 1$ donc $\cos^2(\arcsin(x)) = 1 - \sin^2(\arcsin(x)) = 1 - x^2$. Comme $\arcsin(x) \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, $\cos(\arcsin(x)) > 0$ et donc $\cos(\arcsin(x)) = +\sqrt{1-x^2}$.

On a donc :

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



Exercice 2. Equation différentielle (5 pts)

1. $\varphi'(x) = -\frac{x}{1+x^2}$.
2. Comme $(x^2+1) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'équation différentielle $(x^2+1)y' + xy = 0$ est équivalente à :

$$y' = -\frac{x}{1+x^2}y$$

Il s'agit donc d'une équation différentielle linéaire du premier ordre homogène de la forme $y' = a(x)y$ avec $a(x) = -\frac{x}{1+x^2} = \varphi'(x)$. Une primitive de a est donc donnée par : $A(x) = \varphi(x) = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. Les solutions de l'équation sont donc données par :

$$y = Ke^{-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)} = \frac{K}{\sqrt{1+x^2}} \text{ avec } K \in \mathbb{R}$$

3. L'équation différentielle $(x^2+1)y' + xy = 2x$ est équivalente à :
$$y' = -\frac{x}{1+x^2}y + \frac{2x}{1+x^2}$$
Il s'agit d'une équation linéaire du premier ordre avec second membre. L'équation homogène associée a été résolue dans la question précédente. Ses solutions sont :
$$y_0 = \frac{K}{\sqrt{1+x^2}} \text{ avec } K \in \mathbb{R}$$
Une solution particulière évidente est $y_p = 2$. Par conséquent les solutions de l'équation sont données par :
$$y = 2 + \frac{K}{\sqrt{1+x^2}} \text{ avec } K \in \mathbb{R}$$

Exercice 3. Fonctions réciproques et développements limités (11 pts)

1. (a) La dérivée de g vaut : $g'(x) = \frac{x^4}{1+x^2}$. Cette dérivée est positive sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'en un point isolé ($x = 0$), donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   (b) La fonction g étant continue, l'ensemble $J = g(]0,+\infty[)$ est un intervalle. g étant croissante, les bornes de cet intervalle sont données par les limites de g. On a $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = g(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -x + \frac{x^3}{3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3}{3} = +\infty$. On en déduit que $J =]0,+\infty[$.

   (c) g étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, g définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $g(\mathbb{R})$. Or $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (car $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$), donc pour tout $\lambda \in g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, il existe une unique solution à l'équation $g(x) = \lambda$. Lorsque $\lambda > 0$, on a $\lambda \in J = g(]0,+\infty[)$ donc l'unique solution $c(\lambda)$ de l'équation $g(x) = \lambda$ est dans $]0,+\infty[$.

   (d) La fonction $c(\lambda)$ est la réciproque de la fonction g. Comme g' ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$, $c = g^{-1}$ est dérivable sur J. Cette dérivée est donnée par la formule de dérivée des fonctions réciproques :
$$c'(\lambda) = \frac{1}{g'(g^{-1}(\lambda))} = \frac{1}{g'(c(\lambda))} = \frac{1+c^2(\lambda)}{c^4(\lambda)} \text{ pour } (\lambda \in J)$$

   (e) On a $g'(0) = 0$ donc c n'est pas dérivable en $g(0) = 0$ et par conséquent n'a pas de développement limité d'ordre 1 en 0.

2. (a) Le développement limité d'$\arctan$ en 0 peut être obtenue par intégration du développement limité de sa dérivée $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
   En posant $X = x^2$ et en utilisant le DL de $\frac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 + X^2\varepsilon(X)$, on obtient $\arctan'(x) = 1 - x^2 + x^4 + x^4\varepsilon(x)$. En intégrant ce développement limité, on obtient donc :
$$\arctan(x) = \arctan(0) + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + x^5\varepsilon(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + x^5\varepsilon(x)$$
   On en déduit :
$$g(x) = \frac{x^5}{5} + x^5\varepsilon(x)$$

   (b) L'équation de la tangente à Γ en 0 est donnée par le développement limité en 0 à l'ordre 1 de g. C'est donc $y = 0$. La position relative de la tangente par rapport à Γ est donnée par le signe de $g(x) - 0 = x^5 + x^5\varepsilon(x)$ qui est du signe de x^5 au voisinage de 0. Donc au voisinage de 0, la tangente est au-dessus de Γ pour $x < 0$ et en dessous pour $x > 0$.