Corrigé de l'interrogation de contrôle continu n°2

Exercice 1. Questions de cours

Théorème de Rolle : Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[a,b]$ et dérivable sur l'intervalle $]a,b[$. Si $f(a)=f(b)$ alors $\exists c \in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.

Remarque : Il faut bien faire attention aux bornes des intervalles (ouvertes, fermées) !

Démo : Comme la fonction f est continue sur l'intervalle fermé borné $[a,b]$, l'image $f([a,b])$ est un intervalle fermé borné $[m,M]$ (théorème de Weierstrass).

On distingue deux cas :

1. si la fonction f est constante sur l'intervalle $[a,b]$, alors sa dérivée f' est identiquement nulle sur cet intervalle. N'importe quel point c de l'intervalle $]a,b[$ convient car il vérifie $f'(c)=0$.
2. si la fonction f n'est pas constante, l'intervalle $[m,M]$ n'est pas réduit à un point. Donc l'une, au moins, des deux inégalités strictes :

$$M > f(a) = f(b) \quad \text{ou} \quad m < f(a) = f(b)$$

est vérifiée. Supposons que l'on a $M > f(a)$ (le cas $m < f(a)$ se traite de manière analogue). Par définition de l'image d'un intervalle, comme M est un point de $[m,M]$, il existe un point c de l'intervalle $[a,b]$ telque $f(c)=M$. Comme $M \neq f(a)$ et $M \neq f(b)$, c appartient en fait à l'intervalle $]a,b[$. La fonction f admet en c un maximum et comme elle est dérivable sur $]a,b[$, on a : $f'(c)=0$, (d'après la proposition “dérivée et extremum” du cours).

Exercice 2. Calcul de Développements limités

1. $\frac{1-x^2}{2+x^2} = \frac{1}{2}\frac{1-x^2}{1+\frac{x^2}{2}}$. En posant $X=\frac{x^2}{2}$, comme $\frac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 + X^2\varepsilon(X)$, on a $\frac{1}{1+\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + x^4\varepsilon(x)$. Par conséquent : $\frac{1-x^2}{2+x^2} = \frac{1}{2}(1-x^2)(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+x^4\varepsilon(x)) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + x^4\varepsilon(x)$
2. On a $\sin(2x) = 2x - \frac{(2x)^3}{6} + x^4\varepsilon(x) = 2x - \frac{4x^3}{3} + x^4\varepsilon(x)$ et $\ln(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + -\frac{X^4}{4} + X^4\varepsilon(X)$. En remplaçant X par $\sin(2x)$, on obtient : $\ln(1+\sin(2x)) = 2x - 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^4 + x^4\varepsilon(x)$. **Remarque :** Attention aux développement de $(2x-\frac{4}{3}x^3)^2$. Il apparaît en effet un terme d'ordre 2 : $8x^2$, mais également un terme “croisé” : $-2(2x)\times(\frac{4}{3}x^3)$ qui est d'ordre 3 et qu'il faut donc conserver dans le DL.
3. On pose $t=x-1$. On a alors $\ln(2x) = \ln(2(1+t)) = \ln(2)+\ln(1+t) = \ln(2)+t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+t^4\varepsilon(t) = \ln(2)+(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+(x-1)^4\varepsilon(x-1)$.

Exercice 3. Application des développements limités

1. $\sin x - x\cos x = \frac{x^3}{3} + x^4\varepsilon(x)$.

2. L'équation de la tangente à Γ en 0 est donnée par le développement limité à l'ordre 1 de f :

$$y = 0$$

La position de cette tangente par rapport à Γ est donné par le signe de $f(x) - y = \frac{x^3}{3} + x^4\varepsilon(x)$, qui est du signe de x^3 au voisinage de 0. Donc Γ est en dessous de sa tangente pour $x \leq 0$ et au-dessus pour $x \geq 0$ au voisinage de 0.

3. $\frac{f(x)-\frac{x^3}{3}}{\ln(1+x^4)} = \frac{\frac{x^3}{3}+x^4\varepsilon(x)-\frac{x^3}{3}}{x^4+x^4\varepsilon(x)} = \frac{x^4\varepsilon(x)}{x^4(1+\varepsilon(x))} = \frac{\varepsilon(x)}{(1+\varepsilon(x))}$. Le numérateur de cette expression tend vers 0 et le dénominateur tend vers 1. Par conséquent $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - \frac{x^3}{3}}{\ln(1+x^4)} = 0$

Exercice 4. Etude de fonction

1. $g'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 1$ et $g''(x) = 12x^2 + 6x = 6x(2x+1)$
2. g'' est strictement positive sur $]-\infty, -\frac{1}{2}[$ et sur $]0, \infty[$ donc g' est strictement croissante sur chacun de ces intervalles. g'' est strictement négative sur $]-\frac{1}{2}, 0[$ donc g' est strictement décroissante sur cet intervalle.
3. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} g'(x) = -\infty$ et $g'(-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4}$, et comme g est continue et strictement croissante sur $]-\infty, \frac{1}{2}]$, on a $g'(]-\infty, -\frac{1}{2}]) =]-\infty, -\frac{3}{4}]$ (le fait que $g'(]-\infty, -\frac{1}{2}])$ est intervalle est donné par le théorème des valeurs intermédiaires). De même on montre que $g'(]-\frac{1}{2}, 0[) =]-1, -\frac{3}{4}[$. Or $]-1, -\frac{3}{4}[\subset]-\infty, -\frac{3}{4}]$. Par conséquent $J = g'(]-\infty, 0]) =]-\infty, -\frac{3}{4}]$.
4. g' est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, par conséquent elle définit une bijection de $]0, +\infty[$ sur $g(]0, +\infty[) =]-1, \infty[$. Or $0 \in]-1, \infty[$. Par conséquent, l'équation $g'(x) = 0$ a une unique solution sur $]0, \infty[$. Comme g' est strictement négative sur $]-\infty, 0]$, l'équation $g'(x) = 0$ n'a pas de solution sur cet intervalle et par conséquent, cette équation a une unique solution $c \in \mathbb{R}$. Comme $g(0) = -1 < 0$ et $g(1) = 6 > 0$, cette solution appartient à $]0, 1[$ (encore une fois grâce au TVI).
5. g' s'annule en c, et est strictement négative pour $x < c$ et strictement positive pour $x > c$. Par conséquent g admet un minimum en c
6. Pour tout $x \in [0, c]$, on a $-1 \leq g'(x) \leq 0$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction g entre 0 et c, on obtient donc : $-1 \leq \frac{g(c)-g(0)}{c-0} \leq 0$ c'est-à-dire : $-1 \leq \frac{g(c)-1}{c} \leq 0$. On a donc $1 - c \leq g(c)$. Or $c < 1$, donc $g(c) > 0$. $g(c)$ est le minimum de g et $g(c) > 0$, par conséquent l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.